浙江大学2007-2008学年春夏学期《线性代数》期末试卷答案

1. 填空题（每空3分）

1．设，则（）。

2．设4阶矩阵，则（ 25A ）。

3．设是实数域上的全体反对称矩阵所构成的线性空间，即

。

写出的一组基（）。的维数是（ 6 ）。设4阶矩阵，写出在上面这组基下的坐标（）。

4．设是3阶矩阵，且，则的特征值是（ 0 ），（ 0 ），（ -1 ）。

**解** 因为，则。又因为，所以，且。可见是的特征值，且至少是重根。从而。又因为，则。

1. 计算题。
   1. 计算行列式（12分）。

**解**

* 1. 已知齐次线性方程组

问(1) a,b,c满足何种关系时，方程组仅有零解。（答：两两互异。具体略）

(2) a,b,c满足何种关系时，方程组有无穷多解，并用基础解系表示他的全部解。（要分四种情况讨论，具体略）

* 1. 已知向量组与向量组有相同的秩，且可以由线性表示。求的值，并写出由线性表示的一个表达式。（答：a=15,b=5。具体略）
  2. 设A,B都是3阶实可逆矩阵，A的特征值是，这里是互不相同的正整数，若B的特征值是-5，1，7，，求，并分别写出与相似的对角形矩阵。

解：因为A的特征值是，，所以的特征值为，的特征值为。因为B的特征值是-5，1，7，所以可令。因为是互不相同的正整数，解得。所以与相似的对角形矩阵分别为…。

* 1. 已知二次型。

1. 写出二次型的矩阵。
2. 用正交线性替换化二次型为标准形。
3. 求实对称矩阵B使得。

解：（1）二次型的矩阵为。

（2）使用实对称矩阵对角化的方法，具体略。

（3）因为，令，则有

。令，则且B为实对称矩阵。

**三、证明题**

1．设是实对称矩阵，是正定矩阵。求证的特征值全是实数。

**证**：因为是正定矩阵，所以存在可逆矩阵使得。所以与矩阵相似。因为是实对称矩阵，所以是实对称矩阵，所以的特征值全是实数，从而的特征值全是实数。

2． 设是矩阵，是矩阵，。令为齐次线性方程组的一个基础解系，设，这里为的前个元素。求证线性无关。

**证二**：

因为为齐次线性方程组的一个基础解系，

所以，即。从而有

若

则。而

则，即

因为，则齐次线性方程组只有零解，即

结合式可得

即

由于是的一个基础解系，则线性无关，所以，因此线性无关。